ің

II тарау. СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА НЕГІЗДЕРІ

Анықталмаған а, в коэффициентті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі және осы коэффициенттердің $а_1$, $в_1$ мен $а_2$, $в_2$ екі жұбы берілген.

а) $а_1$, $в_1$ жұп үшін жүйенің шешімін Крамер, Гаусс және матрицалық әдіспен табыңыз.

Әдістемелік нұсқаулар.§1: 1.1, 1.2, 1.3; §2: 2.1, 2.2, 2.3; № 2.1, 2.2, 2.3, 2.19, 2.20, 2.35, 2.46, 2.51, 2.58, 2.65, 2.72, 2.82.§3: 3.1, 3.2, 3.3; № 2.90, 2.91, 2.112, 2.113, 2.152.

Жалпы тапсырма. № 2.55, 2.62, 2.76, 2.86, 2.95, 2.104, 2.117, 2.156.

б) $а_2$, $в_2$ жұп үшін жүйені Гаусс әдісімен шешіңіз.

Әдістемелік нұсқаулар.§3: 3.3 №2.113 Жалпы тапсырма. № 2.120, 2.122.

Жеке тапсырмалар

2.1 $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ x_1+2x_2-3x_3=-3 \\ 4x_1+7x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=2, b_1=0, a_2=-5, b_2=-7$

2.2 $\begin{cases} 4x_1-x_2+ax_3=b \\ 3x_1-2x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=-5 \end{cases}$

$a_1=1, b_1=11, a_2=-3, b_2=-5$

2.3 $\begin{cases} x_1+2x_2+ax_3=b \\ 3x_1+4x_2+x_3=-4 \\ 2x_1+x_2-2x_3=5 \end{cases}$

$a_1=3, b_1=-10, a_2=5, b_2=-14$

2.4 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-4 \\ x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=2, b_1=-2, a_2=3, b_2=-4$

2.5 $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3=-3 \\ x_1+4x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=-3, b_1=4, a_2=-1, b_2=8$

2.6 $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=2 \\ 5x_1+2x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=-3, b_1=-4, a_2=2, b_2=1$

2.7 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 2x_1-2x_2+x_3=7 \\ x_1-4x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=3, b_1=9, a_2=2, b_2=8$

2.8 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+x_2-x_3=4 \\ 4x_1+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=-3, b_1=4, a_2=-2, b_2=8$

2.9 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=-3 \\ x_1+2x_2-x_3=4 \\ -x_1+5x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=-1, b_1=5, a_2=-3, b_2=7$

2.10 $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-10 \\ 4x_1+2x_2-x_3=-3 \\ x_1+3x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=1, b_1=3, a_2=-3, b_2=7$

2.11 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = 4, a_2 = 3, b_2 = 6$

2.12 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = -7, a_2 = 5, b_2 = 2$

2.13 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = 14, a_2 = -1, b_2 = 10$

2.14 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = -3, b_1 = -1, a_2 = -6, b_2 = -1$

2.15 $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -13 \\ x_1 - 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = 1, a_2 = -3, b_2 = 16$

2.16 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = 8, a_2 = -5, b_2 = 1$

2.17 $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 3, b_1 = ?, a_2 = -3, b_2 = -10$

2.18 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = -10, a_2 = -2, b_2 = 2$

2.19 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = 7, a_2 = 5, b_2 = -2$

2.20 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 3, b_1 = 7, a_2 = -5, b_2 = -1$

2.21 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = -5, a_2 = 3, b_2 = 3$

2.22 $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 4, b_1 = 2, a_2 = -7, b_2 = -9$

2.23 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 2, b_1 = 3, a_2 = 1, b_2 = 10$

2.24 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = 5, b_2 = 7$

2.25 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 8x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = 12, a_2 = -1, b_2 = 10$

2.26 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = -7, b_2 = -6$

2.27 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 1, b_1 = -5, a_2 = 3, b_2 = -3$

2.28 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + ax_3 = b \end{cases}$

$a_1 = 3, b_1 = 7, a_2 = 1, b_2 = 3$

2.29 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=5 \\ x_1-5x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=1, b_1=-1, a_2=3, b_2=3$

2.30 $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=3 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=5 \\ 4x_1-5x_2+ax_3=b \end{cases}$

$a_1=2, b_1=-2, a_2=4, b_2=2$

2.0. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16 \\ 5x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$

Шешуі. Сызықтық жүйенің анықтауышы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3-8-35+30+14-2=2\neq 0$$

Демек, жүйенің матрицасы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ мен кеңейтілген мартица $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{pmatrix}$-ның рангілері $r(A)=r(A^*)=3$. Сондықтан берілген жүйе үйлесімді және оның Кронекер теоремасы бойынша жалғыз шешімі бар.

a_1) Крамер әдісі. (2.12) формулаларды пайдаланамыз, Δ_1-ді тапқанда Δ-ның 1-бағаны бос мүшелерден құрылған бағанмен ауыстырылады:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=18-64-112+96+84-16=6$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}=16-64-210+160+112-12=2$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}=48+24+80-90-32-32=-2$$

(2.12) формулалар бойынша:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{2}=3; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2}{2}=1; x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-2}{2}=-1;$$

a_2) Матрицалық әдіс.

Берілген жүйенің матрицасы A-ның анықтауышы $\Delta = |A| = 2 \neq 0$. Сондықтан A квадрат матрицаның A^{-1} кері матрицасы бар, ол (2.10) формуламен анықталады. Алгебралық толықтауыштар:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -37; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3; A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

(2.10) формула бойынша

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{37}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Берілген теңдеуді $AX = B$ матрица түрінде жазсақ, мұнда $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$, онда оның шешімі $X = A^{-1}B$ түрінде болады.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{37}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2}\cdot 6 - \frac{5}{2}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 16 \\ -\frac{37}{2}\cdot 6 + \frac{11}{2}\cdot 16 + \frac{3}{2}\cdot 16 \\ -\frac{11}{2}\cdot 6 + \frac{3}{2}\cdot 16 + \frac{1}{2}\cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1$$

а3) Гаусс әдісі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16(-2) \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16(-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \\ -3x_2 + 11x_3 = -14(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

б) Жүйені шешіңіз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_2 = 16 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Шешуі. Жүйенің матрицасы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}$-ның анықтауышы $\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -7\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=$

$=-15+8-7+6+10+14=0,$ сондықтан жүйенің шешімі жалғыз емес. А-ның рангісін есептейміз: минор $M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$ болғандықтан $rangA=2$.

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 6\\ 2 & 3 & -7 & 16\\ 1 & 2 & -3 & 10\end{pmatrix}$$

кеңейтілген матрицаның рангін есептейміз. M_{33} минордыораушы үшінші ретті минор $\Delta=0$ анықтауыш, ал минор $\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & 16\\ 1 & 2 & 10\end{vmatrix}=30+24+16-18-32-20=0.$ Демек,

$rang\left(A^{*}\right)=2$. $\quad rangA=rangA^{*}=2$ болғандықтан Кронекер-Капелли теоремасы бойынша, жүйе үйлесімді, яғни көп шешімге ие.

Алғашқы екі теңдеуді таңдаймыз:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=6\\ 2x_1+3x_2-7x_3=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=6+2x_3\\ 2x_1+3x_2=16+7x_3\end{cases}$$

Бұл жүйені Крамер ережесі бойынша шешсек:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1;\Delta_1=\begin{vmatrix}6+2x_3 & 1\\ 16+7x_3 & 3\end{vmatrix}=18+6x_3-16-7x_3=2-x_3$$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 6+2x_3\\ 2 & 16+7x_3\end{vmatrix}=16+7x_3-12-4x_3=4+3x_3$ Осыдан $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=2-x_3;x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=4+3x_3$ шығады,

x_3-ке әртүрлі мәндер беріп, ақырсыз көп шешімге ие боламыз: $x_1=2-t$, $x_2=4+3t,x_3=t$. Дербес жағдайда: $t=1$-де $x_3=1,x_2=7,x_1=1$; $t=0$-де $x_3=0,x_2=4,x_1=2.$

Бұл шешімдер үшінші теңдеуді де қанағаттандырады: $2-t+2\left(4+3t\right)-5t=10.$

Жауап: $x_1=2-t,x_2=4+3t,x_3=t.$